PROVA DE ESTATÍSTICA e PROBABILIDADES
SELEÇÃO - MESTRADO/UFMG - 2011/2012

Instruções:

1. Cada questão respondida corretamente vale 1 (um) ponto.
2. Cada questão respondida incorretamente vale -1 (menos um) ponto.
3. Cada questão deixada em branco vale 0 (zero) pontos (neste caso marque TODAS as alternativas).
4. Pelo menos 9 (nove) questões devem ser respondidas pelo candidato.
5. A nota final será a soma dos pontos (negativos e positivos) de todas as questões.
6. As opções escolhidas devem ser assinaladas na folha de respostas no final da prova.

Questões

1. Suponha que $(X_1, ..., X_{10})$ seja uma amostra de uma variável aleatória $X \sim N(0, 1)$. Considere a variável aleatória $Y = \frac{C(X_1+X_2)}{\sqrt{\sum_{i=3}^{10} X_i^2}}$. A respeito da distribuição de Y, podemos afirmar que:
   (a) se $c = \frac{49}{\sqrt{2}}$ então $Y \sim N(0, 1)$;
   (b) se $c = \sqrt{\frac{49}{2}}$, então $Y \sim t_{10}$;
   (c) se $c = \sqrt{\frac{7}{2}}$ então $Y \sim t_7$;
   (d) se $c = \frac{49}{\sqrt{2}}$ então $Y \sim t_{10}$;

2. A respeito das propriedades do Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV) de um parâmetro θ de uma distribuição da Família Exponencial regular, caso ele exista, é correto afirmar que:
   (a) O EMV é sempre não viciado e consistente.
   (b) O EMV é consistente e assintoticamente eficiente.
   (c) O EMV é um estimador não viciado de variancia uniformemente mínima.
   (d) O EMV é não viciado, mas não é consistente.

3. Considere uma variável aletória com distribuição $Binomial(5, \theta)$. Queremos testar $H_0 : \theta = 1/2$ contra $H_1 : \theta = 3/4$. Seja $\alpha = P(erro\ tipo\ I)$. e $\beta = P(erro\ tipo\ II))$. Marque a alternativa correta:

   (a) Fixando $\alpha = 1/32$, se escolhemos a região crítica como $A_1 = \{x : x = 0\}$, temos que $\beta = 1/1024$.

   (b) Fixando $\alpha = 1/32$, se escolhemos a região crítica como $A_2 = \{x : x = 5\}$, temos que $\beta = 243/1024$.

   (c) Fixando $\alpha = 6/32$, se escolhemos a região crítica como $A_3 = \{x : x \geq 4\}$, temos que o poder do teste é 648/1024.

   (d) Fixando $\alpha = 6/32$, se escolhemos a região crítica como $A_4 = \{x : x \leq 1\}$, temos que o poder do teste é 1008/1024.

4. Sejam $X_1 \sim Geometrica(p)$, $X_2 \sim Gama(\alpha, 2)$, $X_3 \sim Uniforme(0, b)$ e sejam $S_1(\mathbf{X}), S_2(\mathbf{X}), S_3(\mathbf{X})$, estatísticas suficientes dos parâmetros de cada distribuição, respectivamente. Marque a alternativa em que as três estatísticas suficientes estão corretas:

   (a) $S_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i, S_2(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} X_i, S_3(\mathbf{X}) = Max_i X_i$.

   (b) $S_1(\mathbf{X}) = \bar{X}, S_2(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} log X_i, S_3(\mathbf{X}) = Min_i X_i$.

   (c) $S_1(\mathbf{X}) = \bar{X}, S_2(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2/n, S_3(\mathbf{X}) = Max_i X_i$.

   (d) $S_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i/n, S_2(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2, S_3(\mathbf{X}) = \bar{X}$.

5. As funções geradoras das variáveis aletórias X,Y e Z são, respectivamente, $M_X(t) = (0,7e^t + 0,3)^{10}$, $M_Y(t) = e^{(e^t - 1)}$, $M_Z(t) = e^{2t+2t^2}$. Então podemos afirmar que as Variáveis X,Y e Z têm, respectivamente, distribuição

   (a) $Normal(0,7; 10), Poisson(1), Quiquadrado(2)$.

   (b) $Binomial(10; 0,7)$, $Poisson(1)$, $Normal(2, 4)$.

   (c) $Binomial(10; 0,3), Poisson(1), Normal(2, 2)$.

   (d) $Binomial(10; 0,7), Poisson(10), Quiquadrado(2)$.

6. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_6$ uma amostra aleatória de uma distribuição $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Seja um estimador não viciado de σ^2

$$T = c\{(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2\}$$

   Determine c e verifique qual dos dois estimadores é mais eficiente: T ou $S^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{6-1}$.

   (a) $c = \frac{1}{3}$ e T é mais eficiente.

   (b) $c = \frac{1}{3}$ e S^2 é mais eficiente.

   (c) $c = \frac{1}{6}$ e T é mais eficiente.

   (d) $c = \frac{1}{6}$ e S^2 é mais eficiente.

7. Caixas de cereais são produzidas em uma determinada fábrica, o peso de cada caixa de cereal é de 16 gramas. Um inspector escolhe uma amostra de 10 caixas e observou uma média de $\bar{X} = 15,9060$ gramas e desvio padrão de $S = 0,2229$ gramas. Suponha que a variável em estudo segue uma distribuição Normal. Usando um coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$. Escolha a alternativa correta:

   (a) $[15,7679;\ 16,0442]$
   (b) $[15,4018;\ 16,4102]$
   (c) $[15,7466;\ 16,0654]$
   (d) $[15,4691;\ 16,3429]$.

8. Um professor de Biologia da UFMG acredita que a variância de vida de um certo organismo ao ser exposto a um determinado agente mortal, é mais de 625 minutos ao quadrado. Uma amostra aleatória de 15 organismos deu uma variância de 1225. Suponha que a variável em estudo segue uma distribuição Normal.
   Considerando-se um nível de significância de 5%, tem-se :

   I. O valor da estatística de teste para verificar as hipóteses levantadas pelo pesquisador é de 27,44.
   II. As informações proporcionam evidências suficientes como para concluir que a afirmação do professor é correta.

   Considerando os itens (I) e (II) acima escolha a alternativa correta:

   (a) Falso Falso
   (b) Falso Verdadeiro
   (c) Verdadeiro Falso
   (d) Verdadeiro Verdadeiro

9. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória com função de densidade

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x},\ x \geq 0,\ \theta > 0.$$

   I. O estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro θ é $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$.
   II. O estimador encontrado no item (I) é consistente para θ.

   Considerando os itens (I) e (II) acima escolha a alternativa correta:

   (a) Falso Falso
   (b) Falso Verdadeiro
   (c) Verdadeiro Falso
   (d) Verdadeiro Verdadeiro

10. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória com função de densidade

$$f(x;\theta) = \frac{1}{6\theta^4} x^3 e^{(-x/\theta)}, \ x \geq 0, \ \theta > 0.$$

I. A estatística $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ é suficiente, mas não é completa para θ.

II. A estatística $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente e completa para θ

Considerando os itens (I) e (II) acima escolha a alternativa correta:

(a) Falso Falso
(b) Falso Verdadeiro
(c) Verdadeiro Falso
(d) Verdadeiro Verdadeiro

11. Suponha que uma urna contém 3 moedas M_1, M_2 e M_3. A moeda M_1 tem probabilidade 2/5 de sair cara, a moeda M_2 tem probabilidade 1/2 de sair cara, a moeda M_3 tem probabilidade 3/5 de sair cara. Uma dessas moedas é selecionada aleatoriamente e lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de sair cara em duas jogadas da moeda selecionada?

(a) 67/190
(b) 73/200
(c) 53/190
(d) 57/200

12. Considere uma urna contendo 1000 bolas, das quais 5 são brancas, 150 são pretas e as outras são amarelas. Uma bola é retirada da urna aleatoriamente e então recolocada na urna antes que outra bola seja retirada. Esse processo segue até 100 vezes. Qual é a probabilidade aproximada de que uma bola branca seja selecionada no máximo 2 vezes?

(a) $13/(8\sqrt{e})$
(b) $5/(8\sqrt{e})$
(c) $1/(2\sqrt{e})$
(d) $3/(2\sqrt{e})$

13. Os ônibus em direção à cidade A chegam na rodoviaria em intervalos de tempo de 25 minutos a partir das 10:00 horas, enquanto os ônibus em direção à cidade B chegam na rodoviária em intervalos de tempo de 25 minutos a partir das 10:10 horas. Se uma pessoa chegar na rodoviária em um horario uniformemente distribuído entre 10:00 e 12:05 e pegar o primeiro ônibus que chega, em que proporção de tempo ela vai para a cidade A? Obs: Considere que os ônibus partem imediatamente após sua chegada à rodoviária.

(a) 1/5
(b) 3/5
(c) 4/5
(d) 2/5

14. A função de densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \textit{se} \;\; x \in (0,1),\, y \in (0,1) \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Determine $P(X < Y)$.

(a) 1/2
(b) 1/4
(c) 1/3
(d) 3/4

15. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias exponenciais independentes e identicamente distribuídas com parâmetro λ. Calcule $E\big(\text{mín}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big)$.

(a) $\frac{1}{(n\lambda)^n}$
(b) $\frac{n}{\lambda}$
(c) $\frac{1}{n\lambda}$
(d) λ^n